Modelo matemático de programación por metas para coadyuvar a la toma de decisiones en la selección de alternativas de inversión en pymes

Mathematical model of programming by goals to contribute to decision-making in the selection of alternatives for investment in SMEs

Fuente: freepik.com. Licencia Creative Commons.

UNIVERSIDAD DE INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO

I+D Revista de Investigaciones
ISSN 2256-1676 / ISSN en línea 2539-519X
Volumen 13 Número 1 Enero-Junio de 2019 pp. 56-67

Modelo matemático de programación por metas para coadyuvar a la toma de decisiones en la selección de alternativas de inversión en pymes[1]

A Mathematical model of programming by goals to contribute to decision-making in the selection of alternatives for investment in SMEs

Carlos Alberto Chica Salgado[2]

Artículo recibido en agosto de 2018; artículo aceptado en septiembre de 2018.

y se referencia usando el siguiente formato: Chica, C. A. (2019). Modelo matemático de programación por metas para coadyuvar a la toma de decisiones en la selección de alternativas de inversión en pymes. *I+D Revista de Investigaciones, 13* (1), 56-67.

DOI: https://doi.org/10.33304/revinv.v13n1-2019005

Resumen

El objetivo de este artículo es presentar un modelo matemático para coadyuvar en la toma de decisiones, resultado del acercamiento a la revisión teórica de la programación por metas, que oriente al decisor sobre el curso de acción óptimo en la selección de alternativas de inversión en pyme. Para tal fin, fue necesario indagar sobre la modelación matemática de la programación por metas y su aplicación, que permitiera identificar cuales principios rigen el comportamiento de la naturaleza del proceso de la toma de decisiones y coadyuvar a la gestión en procesos internos de las pyme, como es el caso de la selección de alternativas de inversión, que lleven a alcanzar los objetivos y fines definidos en las políticas administrativas, dinamizando así el entorno con el cual interactúan las pyme.

Palabras clave: modelo matemático, programación multiobjetivo, programación por metas, pyme, toma de decisiones.

Abstract

The aim of this article is to present a mathematical model to assist in decision-making, result of the approach to the theoretical review of programming by goals, which orient the decision maker on the optimal course of action, in the selection of investment alternatives in SMEs. For this purpose, it was necessary to inquire about the mathematical modeling of the programming by goals and its application, allowing to identify which principles governed the behavior of the nature of the decision-making process and contribute to the management in internal processes of SMEs, as it is the case of the selection of investment alternatives, that lead to reaching the objectives and purposes defined in the administrative policies, thus stimulating the environment with which the SMEs interact.

Keywords: mathematical model, multi-objective programming, programming by goals, SMEs, decision making.

1. Artículo de revisión, con enfoque cuantitativo, resultado del acercamiento a la revisión teórica de la programación por metas. Desarrollado en el Politécnico Colombiano Jaime Isaza Cadavid (Medellín, Colombia). Perteneciente al área de ciencias sociales.

2. Administrador de Empresas, Universidad Nacional de Colombia. Magíster en Administración, Universidad Nacional de Colombia. Docente Asociado - investigador junior del grupo Gestión del Desarrollo Agrario - Gestiagro. Politécnico Colombiano Jaime Isaza Cadavid (Medellín, Colombia): Calle 48 No. 7-151, PBX: 3197900 Ext. 426. ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-5971-7706 Correo electrónico institucional: casalgado@elpoli.edu.co.

Introducción

Estudios y experiencias en las pyme han demostrado que, en sus instancias directivas, algunos de sus miembros están capacitados para efectuar un análisis racional completo en su proceso de toma de decisiones, aplicado a situaciones o sistemas complejos (Gómez, 2014). Este hecho se explica por varias razones:

- El sistema de valores de quien asume el rol de directivo debe ser compatible con el sistema de valores de la pyme respecto a lo que es mejor para esta; en algunas situaciones estos sistemas presentan un comportamiento antagónico, lo cual hace que se plantee una barrera en la identificación de los objetivos organizacionales con relación al proceso de la toma de decisiones.

- En la búsqueda del conocimiento organizacional el directivo puede haber identificado muchas de las relaciones en el interior de la pyme, de su entorno y del contexto y la organización, pero no todas. Este hecho crea una barrera en el proceso de decisión, al no poder definir todas las alternativas o cursos de acción posibles, y, para cada alternativa, todos los resultados posibles.

- En el contexto de las pyme se ha planteado que la competitividad, como componente de desarrollo organizacional y empresarial, se da como estrategia debido a la complejidad cambiante de las dinámicas dentro de los elementos de la organización, de las relaciones de los elementos del entorno y de las interacciones de la organización y su entorno, pareciendo natural entonces que las pyme fijen objetivos múltiples en la búsqueda de su sostenibilidad y permanencia en el contexto económico y social en el cual interactúan (García, 2001).

Contexto de la programación por metas

Se puede decir que la forma de tomar decisiones en la organización ha creado una nueva manera de pensamiento acerca de cómo operan realmente las organizaciones, aumentando nuestra comprensión del diseño organizacional y su incidencia en el clima organizacional (Chica, 2013).

En una pyme, las dinámicas del clima organizacional están enmarcadas en el ámbito de los aspectos de liderazgo y motivación, y su impacto se valora en las acciones emprendidas desde el nivel estratégico de la organización cuando este propone un clima de mayor participación. Es el caso del proceso de la toma de decisiones (Unigarro & Moncayo, 2016), al hacer partícipes de los cursos de acción a los agentes interventores en la decisión, pasando de tomar decisiones centradas en la cúpula a hacerlo desde un enfoque más participativo y colaborativo (Kepner & Tregoe, 1981).

La gestión administrativa en las pyme debe incluir en las tareas de decidir y hacer, principios de organización que aseguren una toma de decisiones correcta. De igual manera, debe incluir principios que aseguren una acción efectiva (Simon, 1964).

Dentro de este enfoque multiobjetivo, hasta el presente se han desarrollado varios métodos analíticos formales de decisión con objetivos múltiples, como es el caso de la programación por metas denominada goal programming (Charnes & Cooper, 1961; Lee, 1972; Ignizio, 1976).

La generación de soluciones eficientes, en un problema de decisión multicriterio, cuando aumenta el número de objetivos y restricciones, puede llegar a presentar complicaciones respecto al curso de acción que debe elegir el decisor, aun cuando se obtenga o se aproxime al número de decisiones óptimas, ya que su número puede ser tan elevado que no sea fácil hacer una elección (Ríos, Ríos-Insua & Ríos-Insua, 1989). En estos casos se puede recurrir a otros enfoques multiobjetivo más pragmáticos, tales como la programación por metas –programación con objetivos múltiples, programación con múltiples objetivos, programación con múltiples criterios–.

La programación multiobjetivo, enfocada como una técnica que permite segregar del conjunto de soluciones posibles aquellas que son paretianamente eficientes, complementada con la ingeniosa y, a la vez, realista manera de introducir las preferencias del centro decisor, que propone la programación compromiso, permite que la unión de ambos enfoques en el proceso de la toma de decisiones se convierta en un instrumento para analizar problemas decisionales, en contextos multicriterio (Barba-Romero & Pomerol, 1997).

La programación por metas se aleja de la filosofía de la optimización, relacionada con la filosofía satisfaciente (Simon, 1955), la cual conjetura que, en las complejas organizaciones actuales, el contexto de las decisiones está definido por información incompleta, recursos limitados, multiplicidad de objetivos y conflicto de intereses, entre otros.

Simon (1957) afirma que, en contextos decisionales complejos, como el proceso de la toma de decisiones en las organizaciones –como el caso de las pyme–, la instancia de decisión intenta que una serie de metas relevantes se aproximen lo más posible a unos niveles de aspiración, fijados de antemano por este centro decisor. Puede decirse entonces que la programación por metas constituye la dimensión operativa de la filosofía "satisfaciente" (Simon, 1957).

Terminología en la programación por metas

La siguiente terminología permite comprender la metodología o la dinámica de la programación por metas;

- *Variable de decisión:* representa algo que está bajo control del decisor y que puede tener impacto sobre la solución del problema. A menos que se indique lo contrario, se asume que las variables son no negativas.

- *Variables desviación:* reflejan la falta N_i , o el exceso de logro P_i de un objetivo i. Se asume que las variables desviación son no negativas.

- *Modelo de programación lineal por metas:* si se tratan los objetivos y las restricciones de una manera simétrica estará formado por *m* funciones lineales, *n* variables decisión y *2m* variables desviación. Cada una de estas funciones es una meta, tanto si originalmente era una restricción como un objetivo.

- *Solución factible:* conforma cualquier conjunto de variables decisión y desviación que son no negativas.

- *Solución básica*: si *(n+2m)-m,* en donde n que corresponde al número de variables decisión, y m al número de variables desviación, se hacen cero y se resuelven las *m* metas; la solución resultante es una solución básica. Las *m* variables que no se hacen cero son las variables básicas, y las que se han anulado son las no básicas.

- *Solución degenerada:* cualquier solución básica, en que una o más de las variables básicas vale cero.

- *Solución implementable:* es una solución posible en la que todas las restricciones rígidas o absolutas se satisfacen. Esto es, la primera prioridad se logra completamente cuando a_i=0

- *Función de logro:* indica el grado de logro asociado a cada meta. Dada una función que se debe minimizar lexicográficamente, la función de logro sería un vector ordenado.

- *Solución óptima:* en programación por metas con prioridades la solución óptima es la solución posible asociada con el vector de logro minimizado.

- *Soluciones óptimas alternativas:* un problema de programación por metas tiene soluciones óptimas alternativas si el espacio de solución asociado con este problema es mayor que un punto; si el espacio de solución es una región, cualquier punto de esta es una solución óptima alternativa. Es decir, tendrá el mismo vector de logro.

- *Solución no acotada:* si hemos asociado niveles de aspiración a todos los objetivos, un programa por metas no puede tener solución ilimitada o solución indeterminada (Barba-Romero & Pomerol, 1997).

Estructura general de un modelo de programación por metas

La programación por metas se fundamenta en establecer, de parte del decisor en forma cuantitativa, un nivel aceptable de logro para cada uno de los objetivos, y, posteriormente, buscar la solución que haga mínima la suma ponderada de las desviaciones de cada objetivo frente al valor fijado por el decisor (Goicochea, Hansen & Duckstein, 1982).

El primer paso en la formulación de un modelo de programación por metas consiste en fijar los atributos que se consideran relevantes para el problema de decisión que estamos analizando. Los atributos son considerados características intrínsecas de las alternativas A_i susceptibles de ser medidas, ya que constituyen la base para la toma de decisiones, base que puede ser medida y evaluada.

Una vez establecidos los atributos se determina el nivel de aspiración que corresponde a cada atributo, es decir, el nivel de logro que el decisor desea alcanzar en su proceso de toma de decisiones.

En segundo lugar, se procede a relacionar los atributos con las metas, en los cuales el nivel de aspiración representa un equilibrio aceptable de logro para el correspondiente atributo, siendo la combinación de un atributo con un nivel de aspiración la formulación matemática que da origen a una meta, teniendo en cuenta las variables de desviación negativa y positiva respectivamente en la acción de la decisión. Debe tenerse en cuenta que la meta representa el nivel que el decisor desea alcanzar en su proceso de toma de decisiones y, por lo tanto, podrá situarse por "encima" o por "debajo" de ese nivel por él definido.

De acuerdo con lo planteado anteriormente, para el atributo i-ésimo se tendrá la siguiente función matemática de la respectiva meta:

$f_i(X) + N_i - P_i = t_i$, en la cual; **(1)**

$f_i(X)$ = expresión matemática del atributo i-ésimo

t_i = nivel de aspiración del decisor

N_i = variable de desviación negativa, la cual cuantifica la cantidad de logro de una meta con respecto a su nivel de aspiración.

P_i = variable de desviación positiva, la cual cuantifica el exceso de logro de una meta con respecto a su nivel de aspiración (Lee, 1972; Ignizio, 1976).

Con relación a la formulación de las metas y las variables decisión que se deben tener en cuenta en el proceso de la toma de decisiones en cuanto hace referencia al tipo de meta, se tendrían que minimizar unas u otras variables de desviación, como se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1
Tipos de metas y variables desviación en la programación por metas

Nombre de la meta	Tipo de meta	Variable de desviación a minimizar
Unilateral Superior	$f_i(X) \leq t_i$	P_i
Unilateral Inferior	$f_i(X) \geq t_i$	N_i
Bilateral	$f_i(X) = t_i$	$N_i + P_i$

Fuente: Autor.

Como el nivel de aspiración en la programación por metas no puede simultáneamente sobrepasarse y quedar por debajo de él, al menos una de las dos variables de desviación que definen cada meta debe ser cero. Ambas variables de desviación tomarán el valor de cero cuando la meta alcanza exactamente el nivel de aspiración.

En el tercer paso del modelo de la programación por metas se procede a identificar las variables de desviación no deseadas. Una variable de desviación se define como no deseada cuando al decisor le conviene que la variable en mención alcance su valor más pequeño, es decir, el valor de cero.

Cuando el tipo de meta tiene como objetivo la maximización, la variable no deseada será la variable de desviación negativa (Ni), es decir, la cuantificación por la falta de logro; por el contrario, cuando el tipo de meta está relacionada con el objetivo de la minimización, la variable no deseada será la variable de desviación positiva (Pi), es decir, la cuantificación por el exceso del nivel de aspiración.

Por último, en el mencionado modelo se procede a la minimización de las variables de desviación no deseadas, proceso que puede ser tratado de diferentes maneras, y que en su procedimiento da origen a variantes de la programación por metas, las cuales desarrollaremos a continuación.

Variantes en la programación por metas

Dependiendo del curso de la acción y de eventuales circunstancias que están fuera de su control, se tendrán diferentes resultados con relación al nivel de logro o aspiración que el centro decisor asigne en el criterio de la decisión.

Para el criterio de la decisión referente al nivel de aspiración en el proceso de la toma de decisiones en la programación por metas, es necesario minimizar las variables de desviación no deseadas a través de procedimientos como:

1. Programación por metas ponderadas.
2. Programación por metas con prioridades.
2.1 Método secuencial.
2.2 Método simplex multifase.
3. Otros procedimientos.

Programación por metas ponderadas

Teniendo en cuenta el modelo de programación por metas formulado por el decisor, el cual relaciona atributos, metas y niveles de aspiración, se procede a minimizar las variables de desviación no deseadas bajo la operacionalización del modelo de programación por metas ponderadas, según el siguiente procedimiento.

1. Se construye la estructura del modelo de programación por metas, teniendo en cuenta que para los atributos se asocia un respectivo nivel de aspiración (ver **(1)**).

2. Se plantea la siguiente formulación que minimiza la suma de las variables de desviación no deseadas:

$$MIN\ P_i \ldots + \ldots N_i \qquad \textbf{(2)}$$

Como la expresión anterior es la suma de variables medidas en distintas unidades, lo cual no tiene sentido, y además los valores absolutos de los niveles de aspiración del decisor son diferentes, se podrían obtener soluciones sesgadas hacia las metas con niveles de aspiración elevados. Para ello, en vez de minimizar la suma de desviaciones absolutas minimizamos la suma de las desviaciones porcentuales según la siguiente formulación:

$$MIN\ \left(100\ \frac{P_i}{t_i}\right) \ldots + \ldots \left(100\ \frac{N_i}{t_i}\right) \qquad \textbf{(3)}$$

Debido a que los porcentajes carecen de dimensión, la suma de la expresión matemática (ver **(3)**), no presenta ningún problema de homogeneidad, además, este procedimiento de normalización garantiza eliminar cualquier sesgo hacia el cumplimiento de metas con niveles de aspiración elevados. Sin embargo, en la formulación anterior se considera que el decisor está dando igual importancia a las metas en cuestión, lo que no tiene que ser cierto necesariamente. Esto tiene solución cuando se plantea la siguiente formulación:

$$MIN\ W_J\ \left(\frac{P_i}{t_i}\right) \ldots + \cdots\ W_j\ \left(\frac{N_i}{t_i}\right) \qquad \textbf{(4)}$$

Donde los coeficientes W_j (pesos), ponderan la importancia relativa que el decisor desea asignar a la realización de cada meta. Este método –conocido como programación por metas ponderadas– consiste en minimizar la suma ponderada de las variables de desviación no deseadas, expresadas en términos porcentuales.

Como se obtiene un modelo de programación lineal tradicional, se puede resolver por el algoritmo simplex; para diversos pesos (W_j) se irán generando diferentes soluciones. Si el decisor da igual importancia a todas las metas, los W_j asumen el valor de 1.

La solución óptima del modelo de programación por metas, propuesto por el centro decisor puede ser obtenida con el paquete informático Lindo –*Linear Interactive and Discrete Optimizer*–.

Programación por metas con prioridades

En la programación por metas ponderadas se supone que todas las metas para el centro decisor tienen una importancia comparable, es decir, los pesos W_j=1. Sin embargo, hay situaciones en el proceso de toma de decisiones en que esto no es cierto, porque algunas metas son absolutamente prioritarias en relación con otras, es decir, el centro decisor asocia prioridades excluyentes a las diferentes metas; en tal caso se hace referencia a la programación por metas con prioridades, también denominada programación por metas lexicográficas.

En la programación por metas con prioridades se clasifican las metas en metas de primera prioridad, segunda prioridad y tercera prioridad, entre otras. Las metas situadas en la prioridad más alta se satisfacen en la medida de lo posible, solo entonces se considera la posible satisfacción de metas situadas en prioridades más bajas. Es decir, las preferencias se ordenan en forma igual que las palabras de un lexicón o diccionario; de ahí la denominación de programación por metas lexicográficas.

El siguiente es el procedimiento en el enfoque de la programación por metas con prioridades:

1. El decisor construye la estructura del modelo de programación por metas con el propósito de identificar las variables desviación no deseadas (ver **(1)**).

2. Se procede a determinar las prioridades Q_i (i = 1 primera prioridad, i = 2 segunda prioridad, i = tercera prioridad y subsiguientes prioridades), asociadas a las respectivas metas según las preferencias del decisor.

3. Construir el vector función de logro (*achievement function)* que reemplaza a la función objetivo tradicional, completando así el proceso de minimización lexicográfica de las variables desviación no deseadas:

$$Lex\ mín=[h_1\ (N_i\ ,P_i)\ ,\ \ h_2(N_i\ ,P_i)\ ,\ldots,\ \ h_k(N_i\ ,P_i)]$$

En donde cada componente de la función logro representa las variables desviación que hay que minimizar, con el objeto de conseguir la máxima realización posible de las metas situadas en la correspondiente prioridad.

El vector función de logro también puede expresarse en una forma abreviada como:

$$Lex\ mín\ a = [a_1\ ,\ \ a_2\ ,\ldots, a_k]$$

En el cual $a_k = h_k\ (N_i,\ P_i)$ representa una función de las variables desviación no deseadas.

El proceso de minimización lexicográfica del vector función logro implica la minimización en forma ordenada de sus componentes, es decir, se encuentra primero el valor más pequeño de la componente a_1, seguidamente el valor más pequeño de la componente a_2 compatible con el valor de a_1 previamente obtenido, y así en forma sucesiva.

4. Se obtiene el modelo de programación por metas con prioridades teniendo en cuenta la función de logro, con el respectivo conjunto de metas asociadas a las prioridades Q_i.

Los análisis basados en la programación por metas con prioridades pueden ser enriquecidos si se somete a un análisis de sensibilidad el ordenamiento de las prioridades Q_i , es decir, estudiando la influencia que tiene una determinada ordenación de prioridades para obtener la solución óptima del modelo que mejor se adecue a la estructura de preferencias del centro decisor.

El modelo de programación de metas con prioridades puede solucionarse recurriendo al uso de paquetes informáticos como WIN QSB –*Quantitative Systems Business– o Lindo –Linear* Interactive and Discrete *Optimizer*–, obteniendo de ellos la solución óptima.

Método secuencial

El método secuencial para la programación por metas con prioridades se fundamenta en el algoritmo simplex, cuyo propósito es resolver una secuencia de problemas de programación lineal. Para ello se divide el modelo de programación por metas de acuerdo con los niveles de prioridad definidos por el centro decisor.

El siguiente es el procedimiento propuesto:

1. Se define el modelo de programación por metas con prioridades (ver **(1)**).

2. Se construye la primera estructura lineal de la secuencia o programa lineal con un único objetivo que minimiza la primera componente del vector logro, sujeta a las restricciones de la primera prioridad Q_1, y las restricciones o metas absolutas si las hubiere.

3. Se procede a minimizar a través de un segundo programa lineal la función de logro correspondiente a las metas de segunda prioridad Q_2, sujeta a las metas de primera prioridad Q_2.

Las metas de segunda prioridad Q_2, más una restricción que asegure que cualquier solución de la segunda prioridad Q_2, no pueden empeorar el nivel de logro previamente obtenido en la primera prioridad Q_1.

4. Se continúa con este procedimiento hasta obtener la solución del último programa lineal, hasta que se consideren todas las prioridades Q_i.

En la aplicación del procedimiento para el método secuencial es necesario reducir el trabajo computacional a través de reglas, como es el caso de suprimir una columna en el tablero simplex. Esta regla establece que cualquier variable no básica que tenga un $(C_j - Z_j) \geq 0$ (positivo) en el tablero óptimo, puede ser suprimida, así como su correspondiente columna en el tablero, dado que la introducción de dicha variable degradaría la solución.

Un modelo de programación por metas con prioridades será resuelto según el algoritmo simplex para cada nivel de prioridad *Qi*, según el siguiente procedimiento:

a) Se determina, $\sum CB * b = b_0$ *en* a_i.

b) Se define la variable a ingresar, según el *Mín Cj*.

c) Se calcula b_i / a_{ij} para determinar la variable a salir, según el *Mín* b_i / a_{ij}.

d) Se determina el valor del punto pivote, el cual es el resultado del cruce entre la columna pivote (variable de ingreso) y la fila pivote (variable de salida).

e) Los valores de la fila en la cual ingresa la variable se dividen entre el número pivote.

f) La columna de la variable que ingresa en el punto pivote toma el valor de uno, el resto de la columna asume el valor de cero.

g) Se calculan los nuevos datos para el siguiente tablero simplex, teniendo en cuenta el tablero anterior.

h) Se procede como en el punto a) hasta obtener en el tablero que los $C_j \geq 0$.

Este método nos permite observar que se han introducido variables de desviación (N_i *o* P_i) tanto para los objetivos como para las restricciones; por ello, en programación por metas no se podrán obtener soluciones no factibles, dado que ninguna solución básica puede incluir variables negativas; ni tampoco soluciones no acotadas, debido a los niveles de aspiración asociados a cada meta.

Se debe tener en cuenta que la solución al modelo de programación lineal final es también la solución al problema de programación por metas equivalente.

Método simplex multifase

El método del simplex multifase para el modelo de programación por metas con prioridades también se conoce en el análisis multiobjetivo como simplex modificado, no siendo más que un refinamiento del método de las dos fases.

En este método se tiene en cuenta una nueva fila *(Cj - Zj)* para cada uno de los niveles de prioridad Q_i definidos en el modelo por el centro decisor; además, el procedimiento para el ingreso y salida de variables en la base y la actualización de los tableros simplex es el referido con anterioridad.

La diferencia de este método radica en el criterio óptimo para cada nivel de prioridad *Qi,* ya que, aunque se tenga una variable no básica con $(C_j - Z_j)$ correspondiente a un nivel de prioridad superior, existe un valor positivo. Esto quiere decir que para mejorar la meta del nivel de prioridad Q_i se tendrá que empeorar una meta de nivel superior –optimalidad paretiana–.

También se podría tener en cuenta en este método la estrategia para eliminar columnas, ya que en un tablero simplex que es óptimo para la prioridad Qi en consideración, cualquier variable no básica y su respectiva columna asociada pueden ser suprimidas siempre y cuando $C_j - Z_j \geq 0$ tenga un valor positivo. La eliminación de columnas puede significar una reducción importante en el tiempo de solución del problema, pero debe tenerse en cuenta que para el análisis de sensibilidad habría que recalcular todas las columnas antes del mencionado análisis.

A continuación, se expone el procedimiento del método simplex multifase:

1. Se define el modelo de programación por metas con prioridades (ver (**1**)).

2. Se procede a construir el primer tablero simplex con base en las prioridades del centro decisor.

3. A partir del segundo tablero simplex, denominado tablero simplex multifase, se procede a dar solución al modelo inicial propuesto por el centro decisor, ya que es el último tablero el que representa la solución óptima dado que no se puede mejorar nada sin empeorar metas de niveles superiores.

Puede observarse que estos resultados son los mismos que se obtienen en la aplicación del método secuencial, teniendo en cuenta que no se ha empleado la estrategia de eliminar columnas.

Otros procedimientos

Usualmente, los métodos empleados para minimizar variables de desviación no deseadas son los enfoques basados en metas ponderadas y en metas lexicográficas; sin embargo, existen otros métodos minimizadores alternos. Estos métodos alternativos son denominados programación prometas mínimax y programación multimetas.

La programación por metas mínimax

Este método busca la minimización de la máxima desviación de entre todas las desviaciones posibles. Su estructura matemática se puede observar en la Tabla 2.

Tabla 2
Estructura matemática, modelo de programación por metas mínimax

Min d
Sujeta a:
$\alpha_i N_i + \beta_i P_i \leq d$
$f_i (x) + N_i - P_i = t_i$

Fuente: Autor.

De esta estructura matemática se determina que d es la máxima desviación, los valores α_i y β_i son los denominados coeficientes normalizadores y, a su vez, indican las preferencias relativas del centro decisor. Si en la meta i-ésima la variable de desviación no deseada fuera la variable negativa (N_i), β_i tomaría el valor de cero en la respectiva meta; en caso contrario, si fuese la variable positiva (P_i) la no deseada, α_i tomaría el valor de cero.

Se puede entonces plantear que entre este enfoque de la programación por metas mínimax y la programación compromiso existe una equivalencia perfecta, ya que en el mínimax los niveles de aspiración para el centro decisor se han fijado en sus ideales, y un modelo de programación compromiso para la métrica $\rho = \infty$.

La programación multimetas

Conocida como *multigoal programming,* es el resultado de una mezcla entre la programación por metas y la programación multiobjetivo, es decir, el procedimiento minimiza las variables de desviación no deseadas en un sentido no lexicográfico sino de programación multiobjetivo.

En este enfoque, al hacerse uso de la programación por metas se cambia el deseo de satisfacer varias metas de parte del centro decisor –lógica "satisfaciente"– según lo planteado por Simon (1957), por el fuerte y sólido concepto de la lógica paretiana –lógica optimizante con objetivos múltiples– cuando se aplica la programación multiobjetivo.

Modelo matemático de programación por metas para selección de alternativas de inversión

El modelo matemático propuesto para este proceso de selección de alternativas de inversión, fundamentado en la programación lineal multiobjetivo, como resultado de la revisión teórica tiene en cuenta, para sus dinámicas de operación, la programación por metas ponderadas, debido a que resulta más operativa que los modelos usuales para la solución de problemas –problemas con un número finito e infinito de alternativas– (Chica, 2006).

El modelo constituido por una serie de variables permite, en sus interacciones, seleccionar una alternativa aceptable o satisfactoria de entre el conjunto de criterios establecidos por el centro decisor, lo que expresa la efectividad del proceso como función de un conjunto de variables, de acuerdo con la siguiente formulación:

$$S_a = f(A_i, M_i, W_j, t_i) \qquad \textbf{(5)}$$

En donde:

S_a = atributo o alternativa A_i en su respectivo orden a ser seleccionado (a), según la tipología de la meta M_i, la asignación de pesos W_j, y el nivel de aspiración o de logro t_i del centro decisor.

A_i = n-ésimo número de atributos de la estructura matemática multiobjetivo.

$i = 1,2,\ldots, n$.

M_i = n-ésimo número de metas que conforman la estructura matemática multiobjetivo.

$i = 1,2, \ldots, n$.

W_j = ponderación de pesos, acorde a la importancia relativa que el centro decisor desee asignar a la realización de cada meta.

t_i = niveles de aspiración o de logro, acordes al objetivo del centro decisor o a las correspondientes restricciones planteadas en el proceso de toma de decisiones.

El modelo propuesto permite que el centro decisor sume las funciones de realización relacionadas con cada meta, asociando previamente a cada una de ellas un peso W_j que representa la importancia relativa que para el decisor tenga el incumplimiento de la meta M_i.

Modelo matemático de programación por metas

FASE A: Estructura general del modelo de programación por metas.

Paso 1: Identificación de atributos

El centro decisor identifica los atributos que se consideran relevantes para el problema de decisión. Estos atributos son características intrínsecas de las alternativas A_i susceptibles de ser medidas, puesto que son la base para el proceso de toma de decisiones.

Paso 2: Asignación de niveles de aspiración

El centro decisor define los niveles de aspiración o de logro que corresponden a cada atributo y que se desean alcanzar en el proceso de toma de decisiones, los cuales deben satisfacerse en la medida de lo posible. Para ello, se tiene en cuenta el objetivo del centro decisor o el término independiente de la correspondiente restricción.

Paso 3: Construcción de metas

Se procede a relacionar los atributos con las metas Mi en las cuales el nivel de aspiración t_i, asignado por el centro decisor, representará un equilibrio aceptable de logro para el correspondiente atributo, siendo la formulación matemática que da origen a una meta, resultado de la combinación de un atributo con un nivel de aspiración.

Para el atributo i-ésimo se tendrá la siguiente función matemática de la respectiva meta:

$$f_i\,(X) + N_i - P_i = ti_i \quad \textbf{(6)}$$

De la cual;

$f_i\,(X)$ = expresión matemática del atributo i-ésimo.

t_i = nivel de aspiración del decisor.

N_i = variable de desviación negativa, la cual cuantifica la cantidad de logro de una meta con respecto a su nivel de aspiración.

P_i = variable de desviación positiva, la cual cuantifica el exceso de logro de una meta con respecto a su nivel de aspiración.

Paso 4: Identificación de las variables de desviación a minimizar

Con la información del paso 3 se identifican las variables de desviación a minimizar, de acuerdo con la tipología de la meta M_i.

Paso 5: Estructura matemática multiobjetivo en la programación por metas

Se construye la estructura del modelo de programación por metas, en el cual se identifican:

a) X_i, Variables de decisión.

b) Número de la meta M_i.

c) Nombre del atributo asociado a la meta M_i .

d) F_i (X), expresión matemática del atributo asociado a la meta M_i.

e) Variable de desviación a minimizar de acuerdo al tipo de meta M_i .

FASE B: Solución del problema de decisión por programación de metas ponderadas

Paso 6: Planteamiento de la ecuación que minimiza las variables desviación no deseada

Se plantea la ecuación que minimiza la suma de las variables de desviación no deseadas, identificadas en el paso 5 de acuerdo a la siguiente formulación:

$MIN\ P_i \ldots + \ldots N_i$

Paso 7: Minimización de la suma de las desviaciones porcentuales

Como la expresión del paso 6 es la suma de variables medidas en distintas unidades, lo cual no tiene sentido, y además los valores absolutos de los niveles de aspiración del decisor son diferentes, se podrían obtener soluciones sesgadas hacia las metas *Mi* con niveles de aspiración elevados.

Para ello, en vez de minimizar la suma de desviaciones absolutas minimizamos la suma de las desviaciones porcentuales a través de la siguiente formulación:

$$MIN\ \left(100\ \frac{P_i}{t_i}\right) \ldots + \ldots \left(100\ \frac{N_i}{t_i}\right)$$

Paso 8: Ponderación de pesos

Debido a que los porcentajes carecen de dimensión, la suma de la expresión matemática del paso 7 no presenta ningún problema de homogeneidad, además, este procedimiento de normalización garantiza eliminar cualquier sesgo hacia el cumplimiento de metas con niveles de aspiración elevados.

Sin embargo, en la formulación anterior se considera que el decisor está dando igual importancia a las metas en cuestión, lo que no tiene que ser cierto necesariamente.

Esto tiene solución cuando se plantea a través de la siguiente formulación:

$$MIN\ W_J\ \left(\frac{P_i}{t_i}\right) \ldots + \cdots\ W_j\ \left(\frac{N_i}{t_i}\right)$$

Donde los coeficientes W_j –pesos–, ponderan la importancia relativa que el decisor desea asignar a la realización de cada meta según la estructura del modelo de Pattern. El método de Pattern asigna unos pesos específicos W_j o coeficientes de ponderación a los criterios que intervienen en la evaluación de las diferentes alternativas A_i, en función de la importancia relativa que tenga ese criterio para el decisor con relación a los demás (Jiménez, 2004).

Una característica específica del método es que la suma de los pesos de los criterios que evalúan un conjunto de elementos o nodos debe ser igual a uno, además, las calificaciones que cada criterio asigna a las alternativas que convergen en un nodo (Kendall, 1970) deben sumar uno, según el siguiente procedimiento:

1. Se identifican los criterios C_n que se van a tener en cuenta para la decisión.

2. Se obtiene la valoración para cada criterio C_n según el nivel de importancia asignado por el decisor.

3. Se resuelve el sistema de ecuaciones resultantes para obtener los valores de los respectivos pesos W_j.

Dado que la condición en el método de Pattern es que la suma de los pesos sea igual a 1, para resolver la ecuación resultante se hace uso de una variable ficticia (x). Posteriormente, se procede a reemplazar el valor de la variable ficticia, según la valoración asignada por el decisor para cada criterio, con el propósito de obtener los respectivos pesos W_j.

Con los pesos Wj obtenidos por este método se procede a calcular las puntuaciones de los diferentes criterios Cn para así poder evaluar los *índices de pertinencia elementales*, que son iguales a la suma de los productos de la puntuación otorgada en cada criterio, por el peso dicho criterio, lo que orientará al decisor en la toma de una decisión con múltiples criterios.

Paso 9: Construcción del modelo de programación por metas ponderadas

Se construye el modelo de programación por metas ponderadas teniendo como función principal de minimización la obtenida en el paso 8, según la siguiente estructura:

$$MIN\ W_J\ \frac{P_i}{t_i} \ldots + \cdots\ W_j\ \frac{N_i}{t_i} \qquad \textbf{(7)}$$

Sujeta a:
Atributo:
Atributo: $f_i(X) + N_i - P_i = t_i$
$N_i, P_i \geq 0$

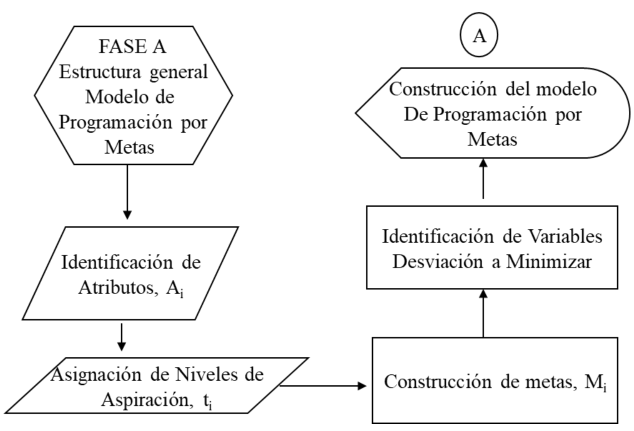

Figura 1. Pasos del 1 al 5. Modelo matemático de programación por metas. Fuente: Autor.

Paso 10: Solución al problema de decisión

Como se obtiene un modelo de programación lineal tradicional, se puede resolver por el algoritmo simplex; para diversos pesos W_j se irán generando diferentes soluciones. Si el decisor da igual importancia a todas las metas, los W_j asumen el valor de 1.

En resumen, el modelo matemático de programación de metas en la toma para decisiones de inversión se puede observar en las figuras 1 y 2 (Chica, 2006).

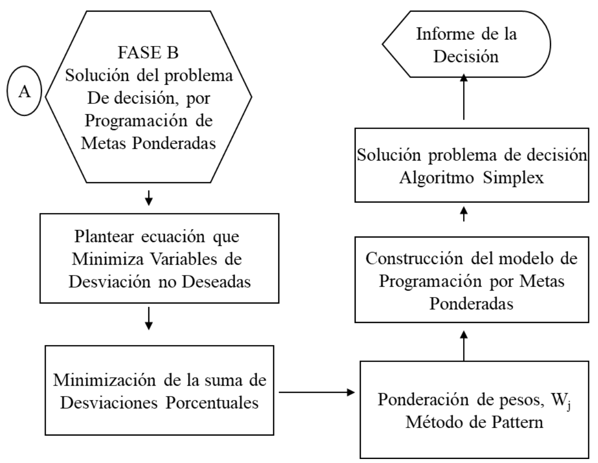

Figura 2. Pasos del 6 al 10. Modelo matemático de programación por metas. Fuente: Autor.

Conclusiones

Al inicio del documento se señaló que el objetivo era presentar un modelo matemático –resultado del acercamiento a la revisión teórica de la programación por metas– para coadyuvar en la toma de decisiones que orientara al centro decisor de una pyme –nivel estratégico– sobre los cursos de acción óptimos en el proceso de la toma de decisiones en la selección de alternativas de inversión. A continuación, se presentan las conclusiones a las que se ha llegado:

1. Para seleccionar cursos de acción teniendo como referencia modelos de programación por metas que le permitan al centro decisor definir el óptimo en el proceso de la toma de decisiones, resultado de este trabajo se explican las dinámicas de operacionalización de los diferentes métodos empleados en la programación por metas y la asignación de pesos que, de acuerdo con la naturaleza de la decisión, permiten proponer modelos matemáticos como herramientas para coadyuvar a la gestión empresarial de las pyme.

2. De igual manera, se presentaron algunas de las consideraciones teóricas que sustentan un modelo matemático de programación por metas. Dichas consideraciones están referidas, entre otras, a los métodos de análisis de la programación multimetas y la asignación de pesos para el proceso de toma de decisiones en la selección de alternativas de inversión en una pyme, que fundamentan la gestión en sus procesos internos de inversión, permitiendo modelizar estos procedimientos mediante el modelamiento matemático.

Dicho modelamiento responde a la dinámica y la complejidad crecientes de la toma de decisiones, que se dan en una organización como las pyme, que tanto necesitan, desde la academia, desarrollos de la teoría de la decisión con el propósito de mejorar sus niveles de gestión en el entorno que les rodea.

Referencias

Barba-Romero, S. & Pomerol, J-C. (1997). *Decisiones multicriterio: fundamentos teóricos y utilización práctica.* España: Servicio de Publicaciones Universidad Alcalá de Henares.

Charnes, A. & Cooper, W. (1961). *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming.* New York: Jhon Wiley and Sons.

Chica, C. A. (2006). *Propuesta de un modelo matemático multicriterio para que la toma de decisiones en fondos de empleados y cooperativas de trabajo asociado de Manizales coadyuve a la competitividad.* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Manizales.

Chica, C. A. (2013). Modelo matemático multicriterio para coadyuvar a la toma de decisiones en la selección de alternativas en pyme. *Estrategias, 11*(21), 49-63.

García, C. E. (2001). *Análisis económico de las organizaciones: Enfoques y perspectivas.* Madrid: Alianza Editorial S.A.

Goicochea, A. & Hansen, D. R. & Duckstein, L. (1982). *Multiobjective Decision Analysis with Engineering and Business Applications.* New York: Jhon Wiley and Sons.

Gómez, F. S. (2014). Colombia en la inserción de la economía internacional. *I+D Revista de Investigaciones, 4*(2), 104–111.

Ignizio, J. P. (1976). *Goal Programming and Extensions.* Massachusets: Lexington Books.

Jiménez, L. G. (2004). *Análisis multicriterio: documento de trabajo.* Manizales: Universidad Nacional de Colombia.

Kendall, M. (1970). *Rank correlation methods.* Londres: Charles Griffin.

Kepner, C. & Tregoe J. (1981). *The new rational manager.* Princenton, USA: Charles Kepner Associates.

Lee, S. M. (1972). *Goal Programming for Decisión Analysis.* Filadelfia: Auerbach Publishers.

Ríos, S., Ríos-Insua, S. & Ríos-Insua, M. J. (1989). *Procesos* *de decisión multicriterio*. Madrid: Ediciones de la Universidad Complutense S.A., Eudema.

Simon, H. A. (1955). A behavioral model of rational choice. *Quaterly Journal of Economics, 69,* 99-118.

Simon, H. A. (1957). *Repris dans Models of Man*. New York: Wiley.

Simon, H. (1964). *El comportamiento administrativo: estudio de los procesos decisorios en la organización administrativa*. Valencia: Tipografía Artística.

Unigarro, S. A. & Moncayo, C. R. (2016). Análisis organizacional de las pyme sector comercio de calzado zona centro, Pasto. *I+D Revista de Investigaciones, 7*(1), 98-108.